

Konstruktiv matematik

Konstruktiv intuitionistisk fuldstændighed

Daniel Hillerström & Mathias Ruggaard Pedersen

Aalborg Universitet

27. juni 2013

- 1 Problemet
- 2 Teori
- 3 Klassisk bevis for fuldstændighed
- 4 Det konstruktive intuitionistiske fuldstændighedsbevis
- 5 Implementering af beviset
- 6 Konklusion
- 7 Errata

Vores projekt tog udgangspunkt i idéen om modstridsbeviser.

- Udelukkede tredje princip.
- Intuitionisme.
- Konstruktivisme.

Hvordan kan man bevise fuldstændighedssætningen for intuitionistisk logik udelukkende ved brug af konstruktive argumenter?

Vores projekt tog udgangspunkt i idéen om modstridsbeviser.

- Udelukkede tredje princip.
- Intuitionisme.
- Konstruktivisme.

Hvordan kan man bevise fuldstændighedssætningen for intuitionistisk logik udelukkende ved brug af konstruktive argumenter?

Definition (Kripke-model [vD08])

En *Kripke-model* for et sprog $\mathcal{L}$ er et par $\mathcal{K} = (K, \Sigma)$, hvor K er en partielt ordnet mængde, og Σ er en funktion på K som opfylder at

- (a) $\Sigma(k) \subseteq \mathcal{L}(\emptyset)$ for alle $k \in K$, hvor $\mathcal{L}(\emptyset)$ er de atomare sætninger i $\mathcal{L}$.
- (b) $\perp \notin \Sigma(k)$ for alle $k \in K$.
- (c) $k \sqsubseteq l \Rightarrow \Sigma(k) \subseteq \Sigma(l)$, for alle $l, k \in K$.

Definition

Forcing-relationen $\Vdash_{\mathcal{K}}$ for en givet Kripke-model $\mathcal{K}$ er defineret ved

- $k \Vdash_{\mathcal{K}} p$ hvis og kun hvis $p \in \Sigma(k)$.
- $k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$ hvis og kun hvis $k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_1$ og $k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_2$.
- $k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_1 \vee \varphi_2$ hvis og kun hvis $k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_1$ eller $k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_2$.
- $k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ hvis og kun hvis for alle $l \sqsupseteq k$ der gælder at $l \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_1 \Rightarrow l \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_2$.

Definition (Kripke-model [vD08])

En *Kripke-model* for et sprog $\mathcal{L}$ er et par $\mathcal{K} = (K, \Sigma)$, hvor K er en partielt ordnet mængde, og Σ er en funktion på K som opfylder at

- (a) $\Sigma(k) \subseteq \mathcal{L}(\emptyset)$ for alle $k \in K$, hvor $\mathcal{L}(\emptyset)$ er de atomare sætninger i $\mathcal{L}$.
- (b) $\perp \notin \Sigma(k)$ for alle $k \in K$.
- (c) $k \sqsubseteq l \Rightarrow \Sigma(k) \subseteq \Sigma(l)$, for alle $l, k \in K$.

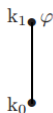
Definition

Forcing-relationen $\Vdash_{\mathcal{K}}$ for en givet Kripke-model $\mathcal{K}$ er defineret ved

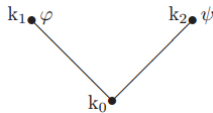
- $k \Vdash_{\mathcal{K}} p$ hvis og kun hvis $p \in \Sigma(k)$.
- $k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$ hvis og kun hvis $k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_1$ og $k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_2$.
- $k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_1 \vee \varphi_2$ hvis og kun hvis $k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_1$ eller $k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_2$.
- $k \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ hvis og kun hvis for alle $l \sqsupseteq k$ der gælder at $l \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_1 \Rightarrow l \Vdash_{\mathcal{K}} \varphi_2$.

Corollary ([vD08])

- 1 $k \Vdash \neg \varphi \Leftrightarrow$ for alle $I \sqsupseteq k$ gælder $I \not\Vdash \varphi$.
- 2 $k \Vdash \neg \neg \varphi \Leftrightarrow$ for alle $I \sqsupseteq k$ eksisterer der et $p \sqsupseteq I$ så $p \Vdash \varphi$.



(a)



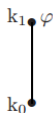
(b)

(a) $k_0 \not\Vdash \varphi$, $k_1 \Vdash \varphi$, $k_0 \Vdash \neg \neg \varphi$, $k_0 \not\Vdash \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi$, $k_0 \not\Vdash \neg \varphi$.

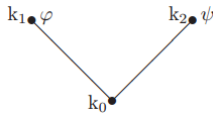
(b) $k_0 \Vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$, $k_0 \not\Vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg \varphi \vee \neg \psi)$.

Corollary ([vD08])

- 1 $k \Vdash \neg \varphi \Leftrightarrow$ for alle $I \sqsupseteq k$ gælder $I \not\Vdash \varphi$.
- 2 $k \Vdash \neg \neg \varphi \Leftrightarrow$ for alle $I \sqsupseteq k$ eksisterer der et $p \sqsupseteq I$ så $p \Vdash \varphi$.



(a)



(b)

(a) $k_0 \not\Vdash \varphi$, $k_1 \Vdash \varphi$, $k_0 \Vdash \neg \neg \varphi$, $k_0 \not\Vdash \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi$, $k_0 \not\Vdash \neg \varphi$.

(b) $k_0 \Vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$, $k_0 \not\Vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg \varphi \vee \neg \psi)$.

Lemma ([vD08])

Hvis $\Gamma \not\vdash_i \varphi$, så er det muligt at udvide Γ til en primisk teori Γ' så $\Gamma' \not\vdash_i \varphi$.

Bevis.

- Lav følge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \subseteq \Gamma'$ hvor

$$\Gamma_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Gamma_k \cup \{\varphi_1\} & \text{hvis } \Gamma_k \cup \{\varphi_1\} \not\vdash_i \varphi \\ \Gamma_k \cup \{\varphi_2\} & \text{ellers} \end{cases}$$

- $\Gamma' \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k \geq 0} \Gamma_k$ er vores primiske teori.



Lemma ([vD08])

Hvis $\Gamma \not\vdash_i \varphi$, så er det muligt at udvide Γ til en primisk teori Γ' så $\Gamma' \not\vdash_i \varphi$.

Bevis.

- Lav følge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \subseteq \Gamma'$ hvor

$$\Gamma_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Gamma_k \cup \{\varphi_1\} & \text{hvis } \Gamma_k \cup \{\varphi_1\} \not\vdash_i \varphi \\ \Gamma_k \cup \{\varphi_2\} & \text{ellers} \end{cases}$$

- $\Gamma' \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k \geq 0} \Gamma_k$ er vores primiske teori.



Lemma (Modeleksistenslemma [vD08])

Hvis $\Gamma \not\vdash_i \varphi$, så eksisterer der en Kripke-model $\mathcal{K} = (K, \Sigma)$ så $k \Vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$ og $k \not\Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ for et $k \in K$.

Bevis.

- Udvid Γ til primisk teori Γ' .
- Lad

$$\Gamma_I \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \mid \varphi \in \Gamma' \text{ og } \varphi \text{ er kun konstrueret af atomare formler fra } \mathcal{P}(\emptyset)_I\}$$

og lav partielt ordnet mængde $K = (\Gamma_I, \sqsubseteq)$.

- Vis at $\Gamma_I \Vdash \varphi_0 \Leftrightarrow \Gamma_I \vdash_i \varphi_0$.
- Konkluder $\Gamma' \not\vdash_i \varphi \Leftrightarrow \Gamma' \not\Vdash \varphi$ og $\Gamma' \not\vdash_i \Gamma \Leftrightarrow \Gamma' \not\Vdash \Gamma$.



Lemma (Modeleksistenslemma [vD08])

Hvis $\Gamma \not\vdash_i \varphi$, så eksisterer der en Kripke-model $\mathcal{K} = (K, \Sigma)$ så $k \Vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$ og $k \not\Vdash_{\mathcal{K}} \varphi$ for et $k \in K$.

Bevis.

- Udvid Γ til primisk teori Γ' .
- Lad

$$\Gamma_I \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \mid \varphi \in \Gamma' \text{ og } \varphi \text{ er kun konstrueret af atomare formler fra } \mathcal{P}(\emptyset)_I\}$$

og lav partielt ordnet mængde $K = (\Gamma_I, \sqsubseteq)$.

- Vis at $\Gamma_I \Vdash \varphi_0 \Leftrightarrow \Gamma_I \vdash_i \varphi_0$.
- Konkluder $\Gamma' \not\vdash_i \varphi \Leftrightarrow \Gamma' \not\Vdash \varphi$ og $\Gamma' \not\vdash_i \Gamma \Leftrightarrow \Gamma' \not\Vdash \Gamma$.



Theorem (Fuldstændighed [vD08])

$$\Gamma \Vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_i \varphi.$$

Bevis.

Antag $\Gamma \not\Vdash_i \varphi$. Så eksisterer Kripke-model $\mathcal{K}$ så $\Gamma \not\models \varphi$, hvilket er en modstrid. $\square$

Theorem (Fuldstændighed [vD08])

$$\Gamma \Vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_i \varphi.$$

Bevis.

Antag $\Gamma \not\Vdash_i \varphi$. Så eksisterer Kripke-model $\mathcal{K}$ så $\Gamma \not\Vdash \varphi$, hvilket er en modstrid. □

Theorem (Fuldstændighed)

- 1 Hvis $\Gamma \Vdash \Delta$, da findes der et vellykket tableau med rod $\langle \Gamma; \Delta \rangle$.
- 2 For ethvert åbent blad S i et tableau gælder det for enhver sekvent $\langle \Gamma; \Delta \rangle \in S$ at man ud fra S kan konstruere en modmodel for $\langle \Gamma; \Delta \rangle$.

Theorem

Lad S være et system. Hvis det om en sekvent $\langle \Gamma; \Delta \rangle \in S$ gælder at $\Gamma \Vdash \Delta$, så er der et vellykket tableau med S som rod.

Første del – bevisideen

Om beviset

- Induktion efter antal manglende deludsagn i $\mathcal{S}$.
- Tableauet konstrueres oppefra-ned.

Bevisideen

Basisskridtet $\mathcal{S}$ er et blad. Der eksisterer pr. antagelse en gyldig sekvent i ethvert blad.

Induktionsskridt Hvis $\langle \Gamma; \Delta \rangle \in \mathcal{S}$ s.a. $\Gamma \Vdash \Delta$, så findes et vellykket tableau med $\mathcal{S}$ som rod.

Eksempel på et tilfælde

- Betingelse: $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Gamma$ og ($\varphi_1 \notin \Gamma$ eller $\varphi_2 \notin \Gamma$).
- Benytter monotoniciteten for $\Vdash$ til at slutte

$$\Gamma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\} \Vdash \Delta.$$

- Deraf konstruerer vi $\mathcal{S}'$

$$\mathcal{S}' = (\mathcal{S} \setminus \langle \Gamma; \Delta \rangle) \cup \langle \Gamma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}; \Delta \rangle.$$

- Induktionsantagelsen giver at $\mathcal{S}'$ er rod i et vellykket tableau.

Første del – bevisideen

Om beviset

- Induktion efter antal manglende deludsagn i $\mathcal{S}$.
- Tableauet konstrueres oppefra-ned.

Bevisideen

Basisskridtet $\mathcal{S}$ er et blad. Der eksisterer pr. antagelse en gyldig sekvent i ethvert blad.

Induktionsskridt Hvis $\langle \Gamma; \Delta \rangle \in \mathcal{S}$ s.a. $\Gamma \Vdash \Delta$, så findes et vellykket tableau med $\mathcal{S}$ som rod.

Eksempel på et tilfælde

- Betingelse: $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Gamma$ og ($\varphi_1 \notin \Gamma$ eller $\varphi_2 \notin \Gamma$).
- Benytter monotoniciteten for $\Vdash$ til at slutte

$$\Gamma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\} \Vdash \Delta.$$

- Deraf konstruerer vi $\mathcal{S}'$

$$\mathcal{S}' = (\mathcal{S} \setminus \langle \Gamma; \Delta \rangle) \cup \langle \Gamma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}; \Delta \rangle.$$

- Induktionsantagelsen giver at $\mathcal{S}'$ er rod i et vellykket tableau.

Første del – bevisideen

Om beviset

- Induktion efter antal manglende deludsagn i $\mathcal{S}$.
- Tableauet konstrueres oppefra-ned.

Bevisideen

Basisskridtet $\mathcal{S}$ er et blad. Der eksisterer pr. antagelse en gyldig sekvent i ethvert blad.

Induktionsskridt Hvis $\langle \Gamma; \Delta \rangle \in \mathcal{S}$ s.a. $\Gamma \Vdash \Delta$, så findes et vellykket tableau med $\mathcal{S}$ som rod.

Eksempel på et tilfælde

- Betingelse: $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Gamma$ og ($\varphi_1 \notin \Gamma$ eller $\varphi_2 \notin \Gamma$).
- Benytter monotoniciteten for $\Vdash$ til at slutte

$$\Gamma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\} \Vdash \Delta.$$

- Deraf konstruerer vi $\mathcal{S}'$

$$\mathcal{S}' = (\mathcal{S} \setminus \langle \Gamma; \Delta \rangle) \cup \langle \Gamma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}; \Delta \rangle.$$

- Induktionsantagelsen giver at $\mathcal{S}'$ er rod i et vellykket tableau.

Første del – bevisideen

Om beviset

- Induktion efter antal manglende deludsagn i $\mathcal{S}$.
- Tableauet konstrueres oppefra-ned.

Bevisideen

Basisskridtet $\mathcal{S}$ er et blad. Der eksisterer pr. antagelse en gyldig sekvent i ethvert blad.

Induktionsskridt Hvis $\langle \Gamma; \Delta \rangle \in \mathcal{S}$ s.a. $\Gamma \Vdash \Delta$, så findes et vellykket tableau med $\mathcal{S}$ som rod.

Eksempel på et tilfælde

- Betingelse: $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Gamma$ og ($\varphi_1 \notin \Gamma$ eller $\varphi_2 \notin \Gamma$).
- Benytter monotoniciteten for $\Vdash$ til at slutte

$$\Gamma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\} \Vdash \Delta.$$

- Deraf konstruerer vi $\mathcal{S}'$

$$\mathcal{S}' = (\mathcal{S} \setminus \langle \Gamma; \Delta \rangle) \cup \langle \Gamma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}; \Delta \rangle.$$

- Induktionsantagelsen giver at $\mathcal{S}'$ er rod i et vellykket tableau.

Første del – bevisideen

Om beviset

- Induktion efter antal manglende deludsagn i $\mathcal{S}$.
- Tableauet konstrueres oppefra-ned.

Bevisideen

Basisskridtet $\mathcal{S}$ er et blad. Der eksisterer pr. antagelse en gyldig sekvent i ethvert blad.

Induktionsskridt Hvis $\langle \Gamma; \Delta \rangle \in \mathcal{S}$ s.a. $\Gamma \Vdash \Delta$, så findes et vellykket tableau med $\mathcal{S}$ som rod.

Eksempel på et tilfælde

- Betingelse: $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Gamma$ og ($\varphi_1 \notin \Gamma$ eller $\varphi_2 \notin \Gamma$).
- Benytter monotoniciteten for $\Vdash$ til at slutte

$$\Gamma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\} \Vdash \Delta.$$

- Deraf konstruerer vi $\mathcal{S}'$

$$\mathcal{S}' = (\mathcal{S} \setminus \langle \Gamma; \Delta \rangle) \cup \langle \Gamma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}; \Delta \rangle.$$

- Induktionsantagelsen giver at $\mathcal{S}'$ er rod i et vellykket tableau.

Theorem

Hvis $\mathcal{S}$ er rod i et vellykket tableau, da findes en sekvent $\langle \Gamma; \Delta \rangle \in \mathcal{S}$ så $\Gamma \vdash_i \Delta$.

Om beviset

- Induktion i tableauets dybde.

Bevisideen

Basisskridt Vi har et blad $\mathcal{S}$. Da tableauet er vellykket har vi $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$ for $\langle \Gamma; \Delta \rangle \in \mathcal{S}$. Heraf $\Gamma \vdash_i \Delta$.

Induktionsskridt Betragt en vilkårlig knude $\mathcal{S} \cup \langle \Gamma; \Delta \rangle$. $\mathcal{S} \cup \langle \Gamma; \Delta \rangle$ og dens børn adskiller sig kun i én sekvent. Induktionsantagelsen siger, at der eksisterer en beviselig sekvent i børnene. Hvis denne beviselige sekvent findes i $\mathcal{S}$, er vi færdige. Hvis ikke, så benytter vi en bevisregel til at konkludere, at $\Gamma \vdash_i \Delta$.

Theorem (Fuldstændighed)

- ① Hvis $\Gamma \Vdash \Delta$, da findes der et vellykket tableau med rod $\langle \Gamma; \Delta \rangle$.
- ② For ethvert åbent blad S i et tableau gælder det for enhver sekvent $\langle \Gamma; \Delta \rangle \in S$ at man ud fra S kan konstruere en modmodel for $\langle \Gamma; \Delta \rangle$.

Om beviset

- Viser at $K = (\mathcal{S}, \sqsubseteq)$ er en partielt ordnet mængde.
- Viser at $\mathcal{K} = (K, \Sigma)$, hvor $\Sigma(\langle \Gamma; \Delta \rangle) = \{p \mid p \in \Gamma \wedge p \in \mathcal{P}(\emptyset)\}$, er en Kripke-model.
- Viser vha. strukturel induktion at
 - ① $k \Vdash \Gamma$ for $k \in \mathcal{S}$
 - ② $k \not\Vdash \Delta$ for $k \in \mathcal{S}$

Om implementeringen:

- Delvis implementering af vores bevis.
- Tautologitjekker i sin nuværende form.
- Skrevet i Haskell.

Overgangen ml. en matematisk beskrivelse og en konkret implementering

- Forholdvis nem overgang fra bevis til software.
- Matematik som et abstrakt programmeringssprog.

Indhold

Vi viser, at vores implementering opfylder at

- $p \rightarrow \neg\neg p$ er intuitionistisk gyldigt,
- mens $\neg\neg p \rightarrow p$ ikke er

Konstruktivt bevis for fuldstændighedssætningen

Vi gav et konstruktivt bevis for fuldstændigheden af intuitionistisk udsagnslogik.

- Beviset giver et semantisk tableau, der opfylder én af mulige to egenskaber:
 - 1 et gyldigt udsagn resultaterer i et bevis,
 - 2 ellers kan man konstruere en modmodel ud fra tableauet.
- Beviset for et udsagn fås ved at betragte tableauet vendt på “hovedet”.
- En modmodel kan konstrueres ud fra et af de åbne blade i tablaudet.

Hvad har vi fundet ud af?

- Strengere beviskrav.
- Konstruktive beviser er informationsrige.
- Indbyder til fokus på beregnelighed.

Fra lineær algebra har vi følgende velkendte og vigtige resultat, der skyldes Jørgen Pedersen Gram og Erhard Schmidt [SIF08, LNS11].

Theorem (Gram-Schmidt)

Hvis $(v_1, \dots, v_m)$ er en liste af lineært uafhængige vektorer i et vektorrum V , så findes der en ortonormal liste $(e_1, \dots, e_m)$ således at

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$$

for alle $k \in \{1, \dots, m\}$.

Fra lineær algebra har vi følgende velkendte og vigtige resultat, der skyldes Jørgen Pedersen Gram og Erhard Schmidt [SIF08, LNS11].

Theorem (Gram-Schmidt)

Hvis $(v_1, \dots, v_m)$ er en liste af lineært uafhængige vektorer i et vektorrum V , så findes der en ortonormal liste $(e_1, \dots, e_m)$ således at

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$$

for alle $k \in \{1, \dots, m\}$.

Beviset er konstruktivt, og giver netop en algoritme til at finde den omtalte basis.

Konstruktive resultater

- ... kan være direkte praktisk anvendelige.
- ... kan også have stor teoretisk betydning.
- ... er ofte mere om omstændige end deres klassiske modparter.
- ... er interessante fra en beregneligheds-mæssigt datalogisk synsvinkel.

Theorem (Sætning 2.9: Rekursive definitioner)

Lad A være induktivt defineret af $\mathcal{F}$ med konstruktorer $f_1, \dots, f_m$. Desuden lad følgende entydige afbildninger være givet

$$H_a : \mathcal{F}(\emptyset) \rightarrow A,$$

$$H_{f_i} : A^n \rightarrow A,$$

hvor $n < \infty$. Så findes der en entydigt givet afbildning $F : \mathcal{F}^* \rightarrow A$ således at

$$F(x) = \begin{cases} H_a(x) & \text{hvis } x \in \mathcal{F}(\emptyset) \\ H_{f_i}(F(x_1), \dots, F(x_k)) & \text{hvis } x = f_i(x_1, \dots, x_k). \end{cases}$$

Theorem (Sætning 2.9: Rekursive definitioner)

Lad $\mathcal{F}$ med konstruktorer $f_1, \dots, f_m$ være givet. Desuden lad følgende entydige afbildninger være givet

$$H_a : \mathcal{F}(\emptyset) \rightarrow A,$$

$$H_{f_i} : A^n \rightarrow A,$$

hvor $n < \infty$ og A er en vilkårlig mængde. Så findes der en entydigt givet afbildning $F : \mathcal{F}^* \rightarrow A$ således at

$$F(x) = \begin{cases} H_a(x) & \text{hvis } x \in \mathcal{F}(\emptyset) \\ H_{f_i}(F(x_1), \dots, F(x_k)) & \text{hvis } x = f_i(x_1, \dots, x_k). \end{cases}$$

Definition (Definition 3.7: Kripke-model)

En *Kripke-model* for et sprog $\mathcal{L}$ er et par $\mathcal{K} = (K, \Sigma)$, hvor K er en partielt ordnet mængde, og Σ er en funktion på K som opfylder at

- (a) $\Sigma(k) \subseteq \mathcal{L}(\emptyset)$ for alle $k \in K$, hvor **At** er de atomare sætninger i $\mathcal{L}$.
- (b) $\perp \notin \Sigma(k)$ for alle $k \in K$.
- (c) $k \sqsubseteq l \Rightarrow \Sigma(k) \subseteq \Sigma(l)$ for alle $l, k \in K$.

Lemma (Lemma 3.12)

Hvis $\Gamma \not\models \varphi$, så er det muligt at udvide Γ til en primisk teori Γ' som opfylder at $\Gamma' \not\models \varphi$.

Definition (Definition 3.7: Kripke-model)

En *Kripke-model* for et sprog $\mathcal{L}$ er et par $\mathcal{K} = (K, \Sigma)$, hvor K er en partielt ordnet mængde, og Σ er en funktion på K som opfylder at

- (a) $\Sigma(k) \subseteq \mathcal{L}(\emptyset)$ for alle $k \in K$, hvor $\mathcal{L}(\emptyset)$ er de atomare sætninger i $\mathcal{L}$.
- (b) $\perp \notin \Sigma(k)$ for alle $k \in K$.
- (c) $k \sqsubseteq l \Rightarrow \Sigma(k) \subseteq \Sigma(l)$ for alle $l, k \in K$.

Lemma (Lemma 3.12)

Hvis $\Gamma \not\models \varphi$, så er det muligt at udvide Γ til en primisk teori Γ' som opfylder at $\Gamma' \not\models \varphi$.

Definition (Definition 3.7: Kripke-model)

En *Kripke-model* for et sprog $\mathcal{L}$ er et par $\mathcal{K} = (K, \Sigma)$, hvor K er en partielt ordnet mængde, og Σ er en funktion på K som opfylder at

- (a) $\Sigma(k) \subseteq \mathcal{L}(\emptyset)$ for alle $k \in K$, hvor $\mathcal{L}(\emptyset)$ er de atomare sætninger i $\mathcal{L}$.
- (b) $\perp \notin \Sigma(k)$ for alle $k \in K$.
- (c) $k \sqsubseteq l \Rightarrow \Sigma(k) \subseteq \Sigma(l)$ for alle $l, k \in K$.

Lemma (Lemma 3.12)

Hvis $\Gamma \not\vdash \varphi$, så er det muligt at udvide Γ til en primisk teori Γ' som opfylder at $\Gamma' \not\vdash \varphi$.

Definition (Definition 3.7: Kripke-model)

En *Kripke-model* for et sprog $\mathcal{L}$ er et par $\mathcal{K} = (K, \Sigma)$, hvor K er en partielt ordnet mængde, og Σ er en funktion på K som opfylder at

- (a) $\Sigma(k) \subseteq \mathcal{L}(\emptyset)$ for alle $k \in K$, hvor $\mathcal{L}(\emptyset)$ er de atomare sætninger i $\mathcal{L}$.
- (b) $\perp \notin \Sigma(k)$ for alle $k \in K$.
- (c) $k \sqsubseteq l \Rightarrow \Sigma(k) \subseteq \Sigma(l)$ for alle $l, k \in K$.

Lemma (Lemma 3.12)

Hvis $\Gamma \not\vdash_i \varphi$, så er det muligt at udvide Γ til en primisk teori Γ' som opfylder at $\Gamma \not\vdash_i \varphi$.

Definition (Definition 4.4: Blad)

Et *blad* i et semantisk tableau er en knude S , hvor alle sekventerne i knuden er lukket under deludsagn, dvs. at der for alle sekventer $\langle \Gamma; \Delta \rangle \in S$ gælder at

- hvis $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Gamma$ så gælder at $\varphi_1 \in \Gamma$ og $\varphi_2 \in \Gamma$,
- hvis $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \Gamma$ så gælder at $\varphi_1 \in \Gamma$ eller $\varphi_2 \in \Gamma$,
- hvis $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \in \Gamma$ så gælder at $\varphi_1 \in \Delta$ eller $\varphi_2 \in \Gamma$,
- hvis $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Delta$ så gælder at $\varphi_1 \in \Delta$ eller $\varphi_2 \in \Delta$,
- hvis $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Gamma$ så gælder at $\varphi_1 \in \Delta$ og $\varphi_2 \in \Delta$,
- hvis $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \in \Delta$ så gælder at der findes en sekvent $\langle \Gamma'; \Delta' \rangle \in S$ således at $\Gamma \subseteq \Gamma'$ og $\varphi_1 \in \Gamma'$ og $\varphi_2 \in \Delta'$.

Definition (Definition 4.4: Blad)

Et *blad* i et semantisk tableau er en knude S , hvor alle sekventerne i knuden er lukket under deludsagn, dvs. at der for alle sekventer $\langle \Gamma; \Delta \rangle \in S$ gælder at

- hvis $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Gamma$ så gælder at $\varphi_1 \in \Gamma$ og $\varphi_2 \in \Gamma$,
- hvis $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \Gamma$ så gælder at $\varphi_1 \in \Gamma$ eller $\varphi_2 \in \Gamma$,
- hvis $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \in \Gamma$ så gælder at $\varphi_1 \in \Delta$ eller $\varphi_2 \in \Gamma$,
- hvis $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Delta$ så gælder at $\varphi_1 \in \Delta$ eller $\varphi_2 \in \Delta$,
- hvis $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \Delta$ så gælder at $\varphi_1 \in \Delta$ og $\varphi_2 \in \Delta$,
- hvis $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \in \Delta$ så gælder at der findes en sekvent $\langle \Gamma'; \Delta' \rangle \in S$ således at $\Gamma \subseteq \Gamma'$ og $\varphi_1 \in \Gamma'$ og $\varphi_2 \in \Delta'$.

“Copy and paste is a design error.”
— David Parnas

Bibliografi



Isaiah Lankham, Bruno Nachtergaele, and Arne Schilling.
Linear Algebra – As an introduction to Abstract Mathematics.
University of California, Davis, October 2011.



Lawerence E. Spence, Arnold J. Insel, and Stephen H. Friedberg.
Elementary Linear Algebra – A Matrix Approach.
Pearson International, second edition, 2008.



Dirk van Dalen.
Logic and Structure.
Springer, fourth edition, 2008.